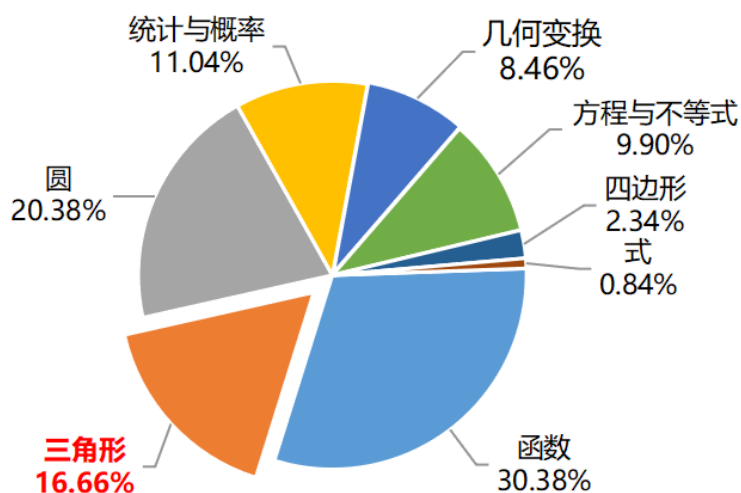


第1讲 相似三角形的性质与判定

相似三角形属于人教版教材第二十七章的内容，是期末考试的重要考察点。本模块《相似三角形》，重点包括相似三角形的判定与性质，同时也需要学生在理解判定与性质的基础上，总结相关模型的解题思路，为后续综合学习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块为相似三角形的性质与判定、相似三角形的基本模型2讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
相似图形	★	低
平行线分线段成比例	★	低
相似三角形的判定	★★★★	高
相似三角形的性质	★★★★	高
位似图形	★★★★	中
A字模型	★★★★★	高
8字模型	★★★★★	高
子母模型与射影定理	★★★★★	高
一线三等角模型	★★★★★	高

一、相似图形

思考：

观察下列几组物体的照片，你发现了什么？



1. 相似图形的定义

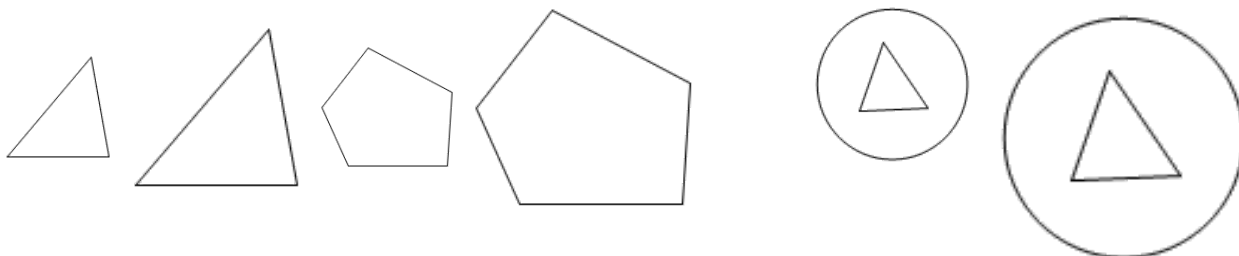
引入中的这些例子，都给我们以形状相同的形象．我们把_____的图形叫做**相似图形**．

！ 注意：

①相似图形的大小_____相同．

②形状和大小都相同的图形称为_____图形，全等图形是_____的相似图形．

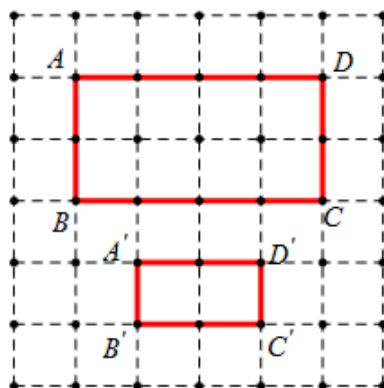
两个图形相似，其中一个图形可以看作由另一个图形_____或_____得到．如下图，每对图形中的两个图形相似，其中较大的图形可以看成是由较小的图形_____得到的，或者其中较小的图形可以看成是由较大的图形_____得到．



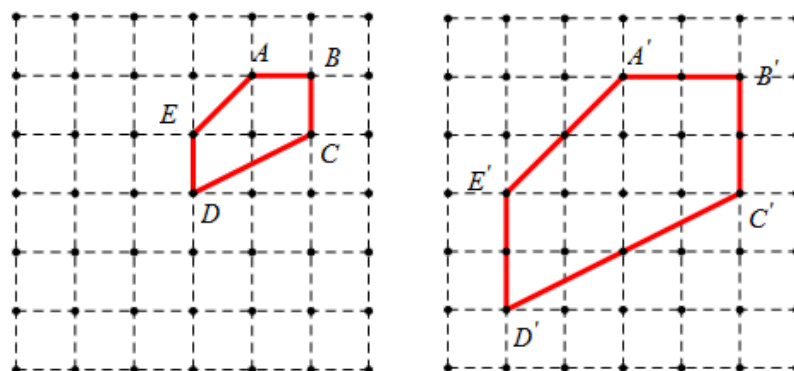
2. 相似多边形

思考：

我们学过全等，知道如果两个图形全等，那么这个两个全等图形的对应的边、对应的角，甚至周长、面积都是_____的．那么如果两个图形是相似的，他们的对应边和对应角有什么关系呢？



再看看图中两个相似的五边形，是否和上图观察的得到的结果一样？



！ 总结：

两个**边数**_____的多边形，如果它们的**角**分别_____，**边**_____，那么这两个多边形叫做**相似多边形**．相似多边形**对应边的比**叫做_____．

相似多边形的性质：

相似多边形的对应角____，对应边_____。

相似多边形的判定：

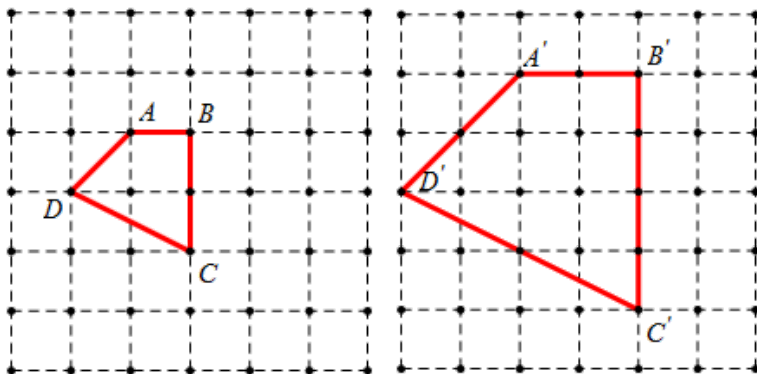
如果两个多边形对应边_____、对应角_____，那么这两个多边形相似。

例如，下图中两个大小不同的四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 中，

$\angle A = \underline{\hspace{1cm}}$, $\angle B = \underline{\hspace{1cm}}$, $\angle C = \underline{\hspace{1cm}}$, $\angle D = \underline{\hspace{1cm}}$,

$\frac{AB}{A'B'} = \underline{\hspace{1cm}}$

因此，四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 相似。



举个“栗子”

栗子1

1. 下列各组图形相似的是（ ）。

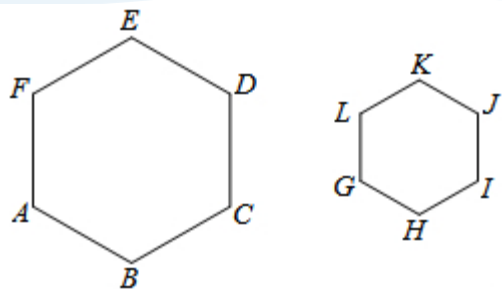


栗子2

2. 下列命题中正确的是（ ）。

- A. 若两个多边形相似，则对应边的比相等
- B. 若两个多边形相似，则对应角的比等于对应边的比
- C. 若两个多边形的对应角相等，则这两个多边形相似
- D. 若两个多边形的对应边的比相等，则这两个多边形相似

3. 如图，六边形 $ABCDEF \sim$ 六边形 $GHIJKL$ ，相似比为 $2:1$ ，则下列结论正确的是（ ）。



- A. $\angle B = 2\angle K$
 B. 六边形 $ABCDEF$ 的周长=六边形 $GLIJKL$ 的周长
 C. $BC = 2HI$
 D. $S_{\text{六边形}ABCDEF} = 2S_{\text{六边形}GLIJKL}$

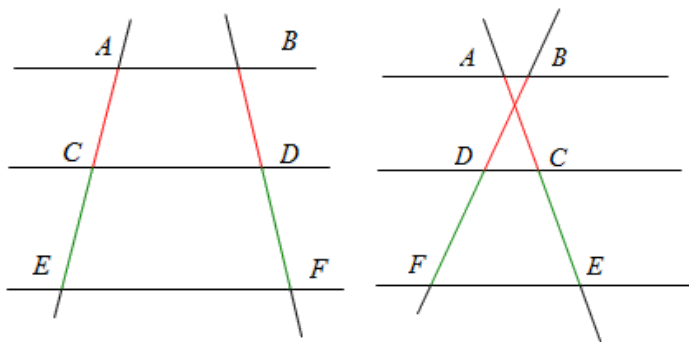
4. 下列说法正确的是（ ）.

- A. 任意两个正方形一定是相似的
 B. 任意两个矩形一定是相似的
 C. 任意两个菱形一定是相似的
 D. 任意两个等腰梯形一定是相似的

二、平行线分线段成比例

平行线分线段成比例基本事实：

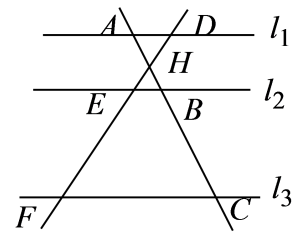
两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例。



如图， $AB \parallel CD \parallel EF$ ，则 $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$ ， $\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BE}$ ， $\frac{CE}{AE} = \frac{DF}{BE}$ 。

栗子3

5. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，直线 AC 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 A, B, C ，直线 DF 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 D, E, F 。 AC 与 DF 相交于点 H ，且 $AH = 2, HB = 1, BC = 5$ ，则 $\frac{DE}{EF}$ 的值为 _____。



三、相似三角形的判定

1. 相似三角形定义

相似三角形的定义：形状_____的两个三角形叫做相似三角形（即三个角分别_____，三条边_____），相似三角形对应边的比叫做_____。相似用符号“ $\sim$ ”表示，读作“_____”。

！注意：

- ①与表示两个三角形全等类似，表示两个三角形相似时，经常把表示对应角顶点的字母写在对应位置上。
- ②当 $k=$ _____时，两个三角形_____，所以全等是特殊的相似，但相似_____全等。

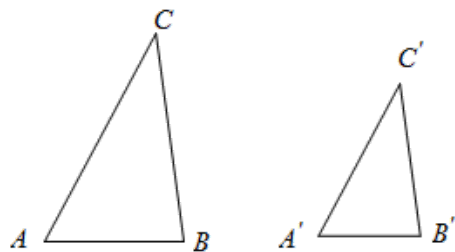
如右图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\angle A = \angle A'$ ，

$\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ ，

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k,$$

那么就说明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似，即

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 k 。

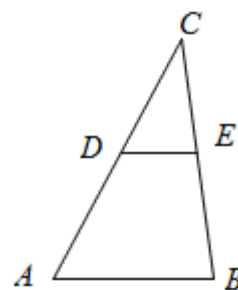


2. 相似三角形的判定

🗣️ 平行出相似

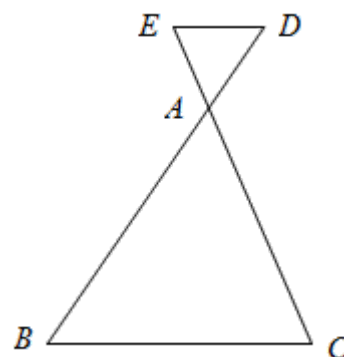
思考一：

如下图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel AB$ ，且 DE 分别交 AC ， BC 于点 D 、 E ，那么 $\triangle CDE$ 与 $\triangle CAB$ 有什么关系？试着证明一下。



思考二：

如下图， $DE \parallel BC$ ， $\triangle ADE$ 和 $\triangle ACB$ 相似吗？试着证明一下。



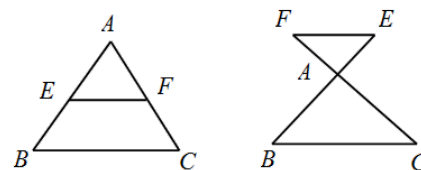
！通过思考部分的证明，得到了证明两个三角形相似的第一个判定定理(预备定理)：

_____于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似。

例如：

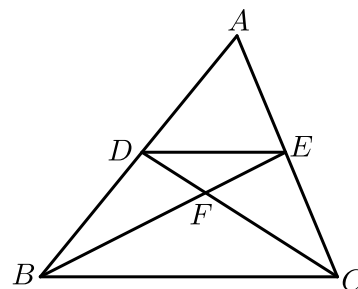
已知 $BC \parallel EF$ ，则 _____ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} =$ _____

—



栗子4

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别为 AB 、 AC 边上的点， $DE \parallel BC$ ， BE 与 CD 相交于点 F ，则下列结论一定正确的是（ ）。



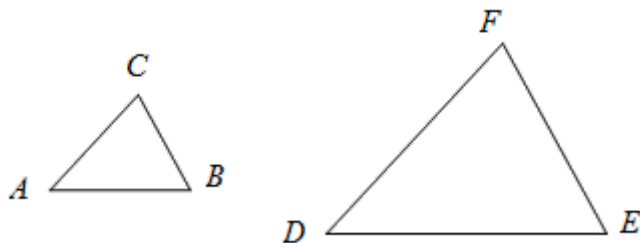
A. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$
 C. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{BC}$

B. $\frac{DF}{FC} = \frac{AE}{EC}$
 D. $\frac{DF}{BF} = \frac{EC}{FC}$

🕒 三边对应成比例

思考：

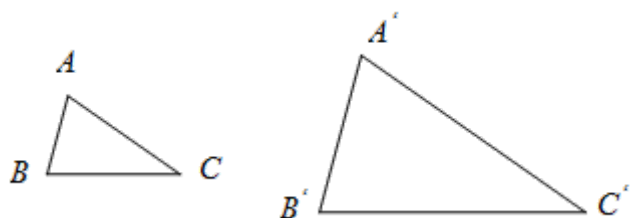
$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ，求证 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。



！通过上述证明可得相似三角形的判定定理：

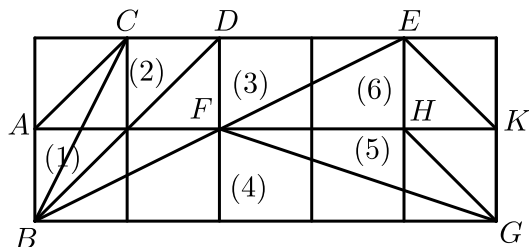
_____的两个三角形相似。

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



栗子5

7. 在正方形网格上有6个三角形：(1) $\triangle ABC$ ，(2) $\triangle BCD$ ，(3) $\triangle BDE$ ，(4) $\triangle BFG$ ，(5) $\triangle FGH$ ，(6) $\triangle EKF$ ，其中(2)到(6)中与(1)相似的三角形的个数是 _____。



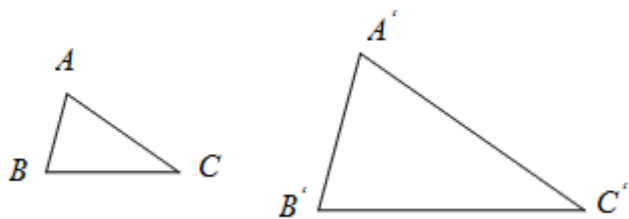
🕒 两边成比例且夹角相等

同理，类似于判定三角形全等的SAS方法，也可以利用两边成比例和夹角相等来判定两个三角形相似。

！相似三角形的判定定理：

_____且_____的两个三角形相似。

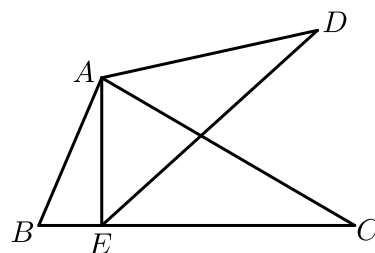
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \angle A = \angle A' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



栗子6

8. 如图，已知： $\angle BAC = \angle EAD$ ， $AB = 20.4$ ， $AC = 48$ ， $AE = 17$ ， $AD = 40$ 。

求证： $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 。

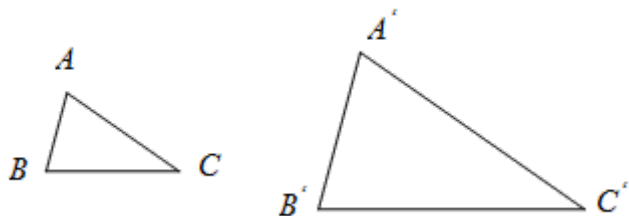


两角分别相等

！相似三角形的判定定理：

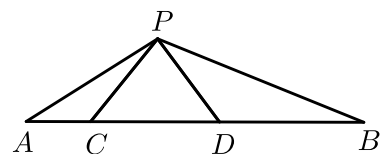
两角分别相等的两个三角形相似。

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



栗子7

9. 如图，点C、D在线段AB上，且 $\triangle PCD$ 是等边三角形， $\angle APB = 120^\circ$ 。



求证： $\triangle ACP \sim \triangle PDB$.

！相似三角形判定总结：

相似三角形判定

1、_____于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似。（即_____出相似）

2、_____对应成比例的两个三角形相似.

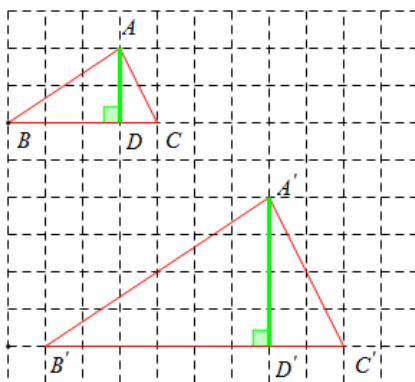
3、_____成比例且_____相等的两个三角形相似.

4、_____分别相等的两个三角形相似.

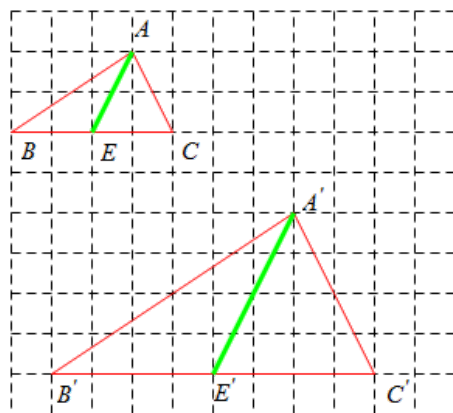
四、相似三角形的性质

思考：

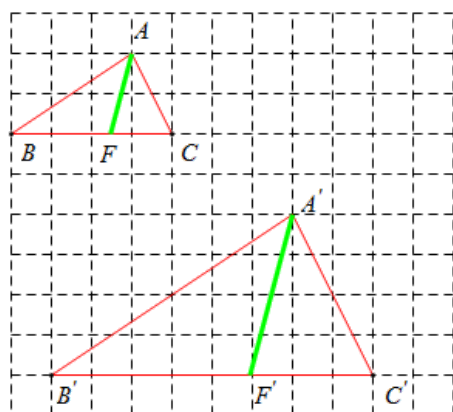
如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形高的比值 $\frac{AD}{A'D'} = \underline{\hspace{2cm}}$.



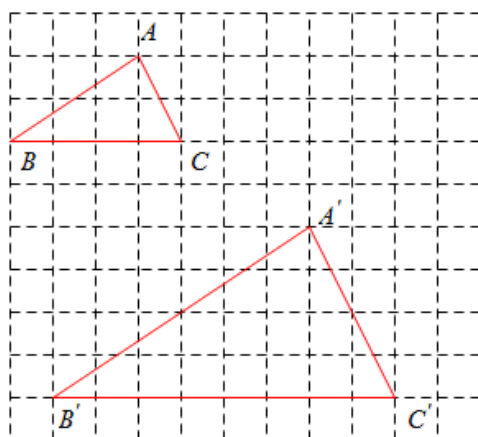
如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形中线的比值 $\frac{AE}{A'E'} = \underline{\hspace{2cm}}$.



如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形角分线的比值 $\frac{AF}{A'F'} =$ _____。

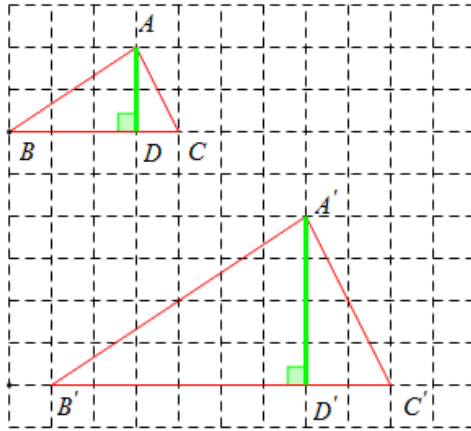


如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形的周长的比值是_____。



根据前面的探究，我们也可以推出相似三角形的面积比与相似比的关系。

如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，则有



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

! 相似三角形性质总结：

相似三角形的性质

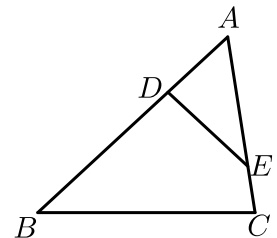
相似三角形的_____相等，_____之比相等，都等于_____.

相似三角形对应_____的比、对应_____的比、对应_____的比、_____之比都等于相似比.

相似三角形面积的比等于相似比的_____.

栗子8

10. 如图， $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ， $\angle ADE = 80^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，则 $\angle C$ 等于（ ）.



A. 40°

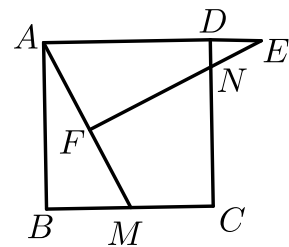
B. 60°

C. 80°

D. 100°

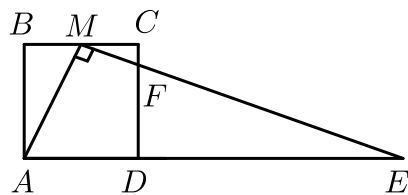
栗子9

11. 如图，正方形 $ABCD$ 中， M 为 BC 上一点， F 是 AM 的中点， $EF \perp AM$ ，垂足为 F ，交 AD 的延长线于点 E ，交 DC 于点 N .



- (1) 求证： $\triangle ABM \sim \triangle EFA$.
- (2) 若 $AB = 12$, $BM = 5$, 求 DE 的长 .

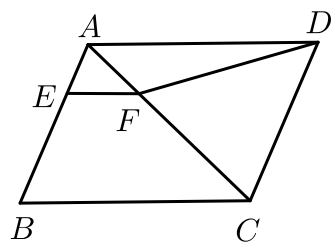
12. 如图，正方形 $ABCD$ 中， M 为 BC 上一点， $ME \perp AM$ ， ME 交 CD 于点 F ，交 AD 的延长线于点 E ，若 $AB = 4$ ， $BM = 2$ ，则 $\triangle DEF$ 的面积为（ ） .



- A. 9 B. 8 C. 15 D. 14.5

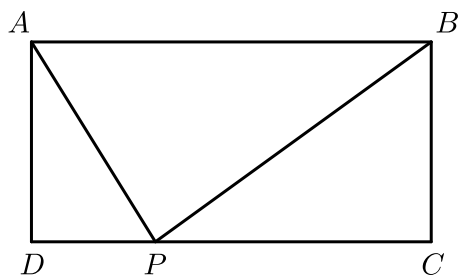
栗子10

13. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， AC 是一条对角线， $EF \parallel BC$ ，且 EF 与 AB 相交于点 E ，与 AC 相交于点 F ， $3AE = 2EB$ ，连接 DF . 若 $S_{\triangle AEF} = 1$ ，则 $S_{\triangle ADF}$ 的值为 _____ .

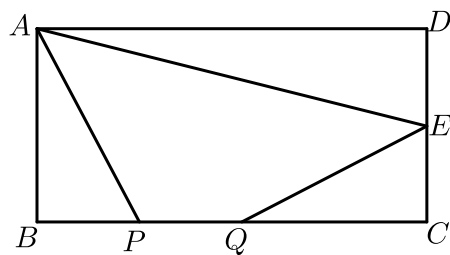


栗子11

14. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AD = 2$ ， $AB = 5$ ， P 为 CD 边上的动点，当 $\triangle ADP$ 与 $\triangle BCP$ 相似时， $DP =$ _____ .



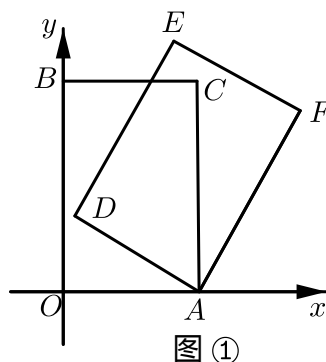
15. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 7$, E 为 CD 的中点, 若 P 、 Q 为 BC 边上的两个动点, 且 $PQ = 2$, 若想使得四边形 $APQE$ 的周长最小, 则 BP 的长度应为 _____.



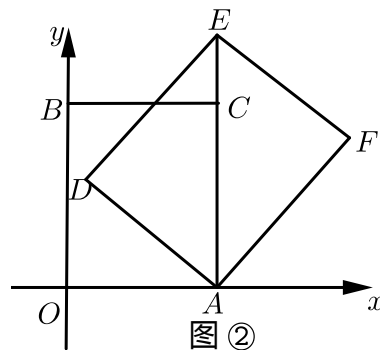
独步天下2

16. 在平面直角坐标系中, 四边形 $AOBC$ 是矩形, 点 $O(0,0)$, 点 $A(6,0)$, 点 $B(0,8)$ 以点 A 为中心, 顺时针旋转矩形 $AOBC$, 得到矩形 $ADEF$, 点 O , B , C 的对应点分别为 D , E , F , 记旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

(1) 如图①, 当 $\alpha = 30^\circ$ 时, 求点 D 的坐标.



(2) 如图②, 当点 E 落在 AC 的延长线上时, 求点 D 的坐标.



(3) 当点 D 落在线段 OC 上时, 求点 E 的坐标 (直接写出结果即可).

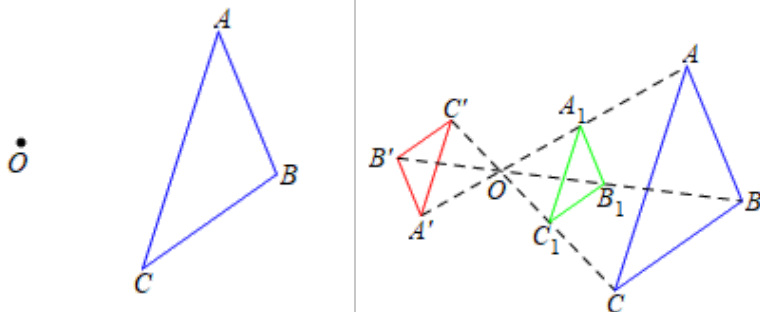
五、位似图形

位似	定义	两个多边形不仅____，而且对应顶点的连线____，像这样的两个图形叫做位似图形．这点叫做____．这时我们说这两个图形关于这点位似．
	性质	1、对应点的连线都经过_____． 2、位似图形上任意一对对应点到位似中心的距离之比等于_____． 3、不经过位似中线的对应线段_____或_____．
	位似变换	以原点为位似中心的位似变换（位似比为k）其对应点的坐标关系可表示为： $P(x, y)$对应点为位似中心同侧_____；$P(x, y)$对应点为位似中心异侧_____．

位似作图：

利用位似变换可以把一个图形_____或_____, 若位似比大于1, 则通过位似变换把原图形放大; 若位似比小于1, 则通过位似变换把原图形缩小.

已知 $\triangle ABC$, 画出一个三角形, 与 $\triangle ABC$ 是位似图形, 且位似比为2:5, 点 O 为位似中心.



以一点为位似中心, 将一个图形按照一定的相似比放大或缩小, 有两种情况:

- ①当 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 在位似中心点 O 的同侧时, 构建的是“___”字相似.
- ②当 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 在位似中心点 O 的异侧时, 构建的是“___”字相似.

栗子12

17. 关于对位似图形的表述, 下列命题正确的有().

- ①相似图形一定是位似图形, 位似图形一定是相似图形;
- ②位似图形一定有位似中心;
- ③如果两个图形是相似图形, 且每组对应点的连线所在的直线都经过同一个点, 那么这两个图形是位似图形;
- ④位似图形上任意一组对应点 P, P' 与位似中心 O 的距离满足 $OP = k \cdot OP'$.

A. ①②③④

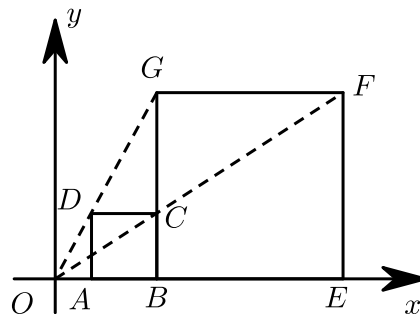
B. ②③④

C. ②③

D. ②④

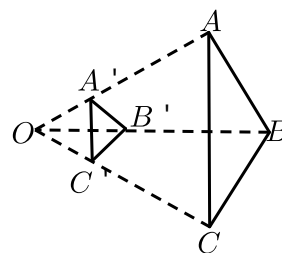
栗子13

18. 如图, 在平面直角坐标系中, 正方形 $ABCD$ 与正方形 $BEFG$ 是以原点 O 为位似中心的位似图形, 且相似比为 $\frac{1}{3}$, 点 A, B, E 在 x 轴上, 若正方形 $BEFG$ 的边长为6, 则 C 点坐标为().



- A. (3,2) B. (3,1) C. (2,2) D. (4,2)

19. 如图，以点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 缩小后得到 $\triangle A'B'C'$ ，已知 $OB = 3OB'$ ，则 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为（ ）。



- A. 1:3 B. 1:4 C. 1:5 D. 1:9

栗子14

20. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标为 $A(5,0)$ 、 $B(6,4)$ 、 $C(3,0)$ ，将 $\triangle ABC$ 以坐标原点 O 为位似中心，以位似比 $2:1$ 进行缩小，则缩小后的点 B 所对应的点的坐标为 _____。

栗子15

21. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $O(0,0)$ ， $A(6,0)$ ， $B(0,8)$ ，以某点为位似中心，作出 $\triangle AOB$ 的位似 $\triangle CDE$ ，则位似中心的坐标为 _____。

